

## Controladores de modo deslizante para humedad del suelo modelada por ecuación Diferencial parcial no lineal y Análisis de ingravidez

Sliding Mode Controllers for Soil Moisture Modeled by Nonlinear Partial Differential Equation and Weightlessness Analysis

José Luis Huayanay Villar<sup>1</sup>, José Paulo Vilela Soares da Cunha<sup>1</sup>  
Universidad del Estado de Río de Janeiro-UERJ, RJ, Brasil  
Instituto de pesquisas espaciais, São Jose dos campos, SP, Brasil

### RESUMEN

El presente trabajo de investigación es una continuidad de las primeras versiones de Controladores de modo deslizante para humedad del suelo modelada por ecuación Diferencial parcial parabólico no lineal (2021), no fue considerado los efectos de la ingravidez. El control de modo deslizante (SMC) se aplica para regular el contenido de agua en el suelo para riego de precisión. La dinámica de la infiltración de agua en medios porosos (suelo) se modela mediante la ecuación de Richards, que es una ecuación diferencial parcial parabólica no lineal (PDE) incluida los efectos de la ingravidez, con ejemplos de ambientes de Luna y Marte. Se consideran dos objetivos de control: el control de la humedad promedio y el control del contenido de agua del suelo a una profundidad específica con ejemplos de ambientes de Luna y Marte. Se proponen estrategias de SMC, se destaca el uso de un controlador con acciones proporcionales e integrales conectadas en cascada para el caso de sensor y actuador no colocados. Los resultados de la simulación indican el excelente desempeño de estos sistemas de control y el rechazo de perturbaciones externas como la evaporación del agua, la lluvia o ambientes con ingravidez.

**Palabras clave:** Control por modos deslizantes; Ecuación diferencial parcial; Control de riego; Dinámica no lineal; Ingravidez.

### ABSTRACT

The present work is a continuation of the first versions of Sliding Mode Controllers for soil moisture modeled by nonlinear parabolic partial differential equation (2021) in which the effects of weightlessness were not considered. Sliding Mode Control (SMC) is applied to regulate the water content in the soil for precision irrigation. The dynamics of water infiltration in porous media (soil) is modeled by the Richards equation, which is a nonlinear parabolic partial differential equation (PDE) including weightlessness effects, with examples from Moon and Mars environments. Two control objectives are considered: control of average moisture and control of soil water content at a specific depth with examples from Lunar and Mars environments. SMC strategies are proposed, highlighting the use of a controller with proportional and integral actions connected in cascade for the case of sensor and actuator not placed. The simulation results indicate the excellent performance of these control systems and the rejection of external disturbances such as water evaporation, rain or weightless environments.

**Keywords:** Control by sliding modes; Partial differential equation; Irrigation control; Nonlinear dynamics; weightless.

<sup>1</sup> Universidad del Estado de Río de Janeiro-UERJ, RJ, Brasil, Email: [villar.jose@posgraduacao.uerj.br](mailto:villar.jose@posgraduacao.uerj.br), [jose.villar@inpe.br](mailto:jose.villar@inpe.br)

## 1. INTRODUCCIÓN

Los métodos agrícolas en la tierra han evolucionado durante milenios para satisfacer ambas necesidades. La población está creciendo y los recursos son limitados, y estos métodos ahora necesitan ser adaptados a los efectos del calentamiento global. Problemas similares pueden ocurrir en la agricultura. métodos adaptados a la agricultura espacial. La variable principal en el espacio es la gravedad; Planetas (por ejemplo, Marte, 1/3 g) y La luna (por ejemplo, 1/6 g) (Monje et al, 2003). Hay un ejemplo de esto en la ciudad antigua de Machu Picchu-1450, donde los Incas alcanzaron unos conocimientos avanzados de planificación hidráulica, drenaje y construcción de riego duradero (Ribeiro, 2013)

La predicción y el control del movimiento del agua en los suelos. son problemas importantes en algunas ramas de la ciencia e ingeniería, como hidrología, mecánica de suelos y agronomía. Estos medios pueden saturarse cuando el contenido de agua es máximo, o insaturado (Villar & Cunha, 2022). En todos los estudios de la zona no saturada, se supone que el movimiento del agua obedece a la clásica ecuación de (Richards, 1931), debido a que en este trabajo se utilizan estas ecuaciones diferenciales parciales no lineales (PDEs) Gardner, W. (1922). Gardner en 1922 (Gardner, 1922) descubrió que el potencial de Buckingham estaba estrechamente relacionado con la presión en capas de agua. También demostró que un aparato de arcilla porosa podría usarse para la medición exacta del contenido de agua ( $\theta$ ) o el flujo en un medio sólido poroso. Por la misma razón, (Richards, 1931) demostró que, si un medio poroso es mojado por un líquido y si el medio no está saturado, entonces la presión en las películas líquidas (capas delgadas) es menor que la presión atmosférica y depende de la cantidad de líquido presente en el medio (fenómeno de capilaridad) (Villar & Cunha, 2022). Además de los problemas mencionados anteriormente, la difusividad hidráulica (D) y la conductividad hidráulica (K) en el proceso son factores importantes a considerar. Existen métodos empíricos para calcular K y D, como los modelos no lineales de Van Genuchten (1980) y la generalización de Hayek (2016) (Hayek, 2016).

Villar et al. (2020) usó temporizadores simples y cambia para comandar un sistema hidropónico y de riego por suelo, que es una estrategia habitual. A pesar de la simplicidad de estos sistemas, las irregularidades de aplicación, la variabilidad espacial de las propiedades del suelo y las condiciones climáticas hacen que el almacenamiento de agua en el suelo presenta grandes variaciones en el espacio. Eso motiva el enfoque del problema de síntesis de los controladores para EDP (Molina, 2019) e Coron, J.M. (2007), basado en modelos no lineales que describen de manera realista el comportamiento dinámico del agua en el suelo a ser revisado. Por otro lado, el control es la estructura variable. (control de estructura variable — VSC) o control por modo control de modo deslizante – SMC (Utkin, 1978) aplicables a los EDP (Wadoo, 2012) e (Molina, 2019), asegura un desempeño superior al rechazo los efectos de las incertidumbres y perturbaciones, además de asegurar propiedades de convergencia y estabilidad. (Villar & Cunha, 2022) desarrollan “Controladores de modo deslizante para Humedad del suelo modelada por ecuación Diferencial parcial parabólico no lineal” consistía en que el control de modo deslizante (SMC) se aplica para regular el contenido de agua en el suelo para riego de precisión. La dinámica de la infiltración de agua en medios porosos (suelo) se modela mediante la ecuación de Richards y se consideran dos objetivos de control: el control de la humedad promedio y el control del contenido de agua del suelo a una profundidad específica (Villar & Cunha, 2022).

Este artículo presenta un enfoque manera sistemática de desarrollar el control automático de humedad en el suelo siguiendo los pasos:

- Primero, el movimiento del agua en el suelo es modelado por el PDE de Richards en la Sección 2, destacando su dinámica no lineal considerando parámetros gravitacionales ( $g$ ) y la nueva condición de contorno en la superficie, donde se rocía el agua.
- Luego el SMC para regular el contenido promedio de agua en una capa superficial de suelo se analiza en la Sección 3 para la ecuación no lineal de Richards.
- Para manejar el control donde el sensor y el actuador no están colocados, es decir, donde el sensor de humedad está enterrado lejos de la superficie sobre la que se rocía el agua, se propone en la Sección 4 un controlador con acciones proporcional e integral (PI) conectados en cascada con el SMC para la humedad media, con el fin de obtener el buen comportamiento del riego automático considerando definiciones de ingravidez.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Qué instrumentos, métodos, formalismos u otros ha utilizado para resolver el problema. Puede tener subsecciones, como, por ejemplo.

### 2.1. Infiltración de agua en el suelo

Esta sección representa el modelo de propagación dinámica el agua no se basa sólo en los EDP. esta dinámica lineal numérico como consecuencia de la dependencia de la conductividad hidráulica  $K(\Psi)$  y la difusividad  $D(\Psi)$  en relación con una columna de agua de matriz potencial  $\Psi$ . Ley de Darcy (Richards, 1931), puede expresarse mediante la ecuación ((Richards, 1931), eq. (9)) (Villar & Cunha, 2022):

$$q = -K(\theta)\nabla\Phi \tag{1}$$

donde  $q$  es el flujo instantáneo (m/s) o densidad de flujo de agua en las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$  (ejes horizontales) y  $z$  (eje vertical mirando hacia abajo desde la superficie tierra),  $-\nabla\Phi$  es el campo total que produce el movimiento del agua.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\nabla \cdot q \tag{3}$$

donde  $\theta \in [0, 1)$  es el contenido de humedad no solo ( $m^3/m^3$ ),  $\partial\theta/\partial t$  y sus tasas de variación en relación con tiempo y  $\nabla \cdot q$  es la divergencia del movimiento del agua. A partir de las ecuaciones (1) a (3) obtenga la ecuación de Richards (Villar & Cunha, 2022):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi\theta}{\partial\theta} \frac{\partial\Psi\theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi\theta}{\partial\theta} \frac{\partial\Psi\theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi\theta}{\partial\theta} + gK(\Psi(\theta)) \right] \tag{4}$$

Dado que la difusividad hidráulica del contenido de agua se puede representar en la forma,  $g$ : gravedad terrestre.

$$D(\theta) = K(\Psi(\theta)) \frac{\partial\Psi\theta}{\partial\theta} \tag{5}$$

La nueva ecuación de Richards que apenas depende de la humedad Hillel, D. (1998) y (Tarquino, (2018) eq. (2.1)) resultando,

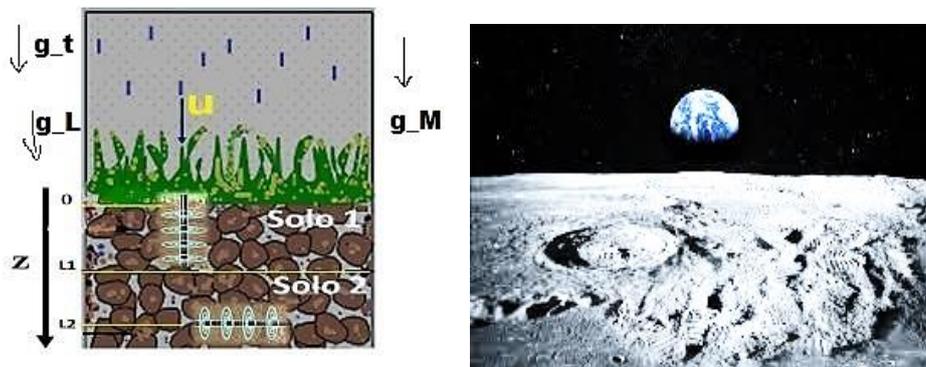
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial \theta}{\partial y} \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial z} + gK \right] \tag{6}$$

que se puede expresar como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla [D(\theta)\nabla(\theta)] + g \frac{dK(\theta)}{d\theta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \tag{7}$$

**Figura 1**

Sección vertical de solo la ubicación de los dos sensores de humedad y ejemplo de suelo Lunar.



**Fuente.** Adaptado de (Villar & Cunha, 2022).

El modelo de este sistema de riego se puede reducir a un EDP unidimensional con flujo de agua vertical unidimensional en un terreno semi-infinito ( $z \in \mathbb{R}^+$ ). Para esto, se supone que el agua se rocía uniformemente sobre la superficie plana del suelo, por lo tanto (7) puede restringirse al espacio unidimensional vertical, (Molina, 2019).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + g \frac{dK(\theta)}{d\theta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \tag{8}$$

cuales resultados

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + gK \right] \tag{9}$$

Esto también se puede representar con otra nomenclatura más compacta para uso posterior, destacando su comportamiento no lineal (Villar & Cunha, 2022):

$$\theta_t = D(\theta)\theta_{zz} + [D_z(\theta) + gK(\theta)]\theta_z \tag{10}$$

**2.1 Análisis de ingravidez**

Yakov Isidorovich Perelman consideró que los fenómenos relacionados con la ingravidez eran reales que definía como la falta de gravedad (Baluković et al, 2018). Un ejemplo importante es la gravedad lunar y la gravedad de marte.

**Tabla 1**

*Propiedades de ingravidez Luna y Marte.*

Espacio	Parámetro
Gravedad Lunar	$g_L \cong 1/6g$
Gravedad Marte	$g_M \cong 1/3g$

**Fuente.** Datos obtenidos de (Medina, 2019).

Estos datos son importantes para analizar el comportamiento de la infiltración del agua y posibilitar cultivar plantas en ambientes con ingravidez. Entonces la ecuación (10) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\theta_t = D(\theta)\theta_{zz} + [D_z(\theta) + 6g_L K(\theta)]\theta_z \tag{11}$$

$$\theta_t = D(\theta)\theta_{zz} + [D_z(\theta) + 3g_M K(\theta)]\theta_z \tag{12}$$

La Figura 1 ilustra el riego por lluvia o por aspersión que humedecen el suelo uniformemente. esta figura también muestra dos sensores utilizados para el control automático de la humedad: la superior mide la humedad media del suelo entre la superficie  $z = 0$  m y la profundidad  $L_1 \in R^+$ , el otro mide la humedad en la profundidad  $L_2 \in R^+$ .

**2.2 Difusividad y conductividad hidráulica.**

Modelos de Difusividad y conductividad hidráulica se describen aquí como funciones del contenido de agua adimensional dada por (Villar & Cunha, 2022):

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[ \frac{1}{1 + (ah)^p} \right]^m \tag{13}$$

donde  $\theta_r \in R^+$  es la humedad residual ( $m^3/m^3$ ),  $\theta_s \in R^+$  es la humedad de saturación ( $m^3/m^3$ ),  $p \in R^+$  es un parámetro que depende del medio,  $m \in R^+$  describe la retención de agua en el suelo y  $h \in R$  es la cabeza de agua. Se debería notar que  $0 \leq \theta_r \leq \theta \leq \theta_s < 1$ . Por otro lado,  $\theta$  puede ser expresado en términos de  $\Theta$  como

$$\theta = \Theta(\theta_s - \theta_r) + \theta_r \tag{14}$$

Para reducir la complejidad y facilitar la simulación, se puede utilizar la conductividad y difusividad hidráulica del suelo. calculado por ((Hayek, 2016), eq. (11)):

$$K(\Theta) = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} \Theta^n, \quad D(\Theta) = \frac{nK_s}{a(\theta_s - \theta_r)} \Theta^{n-1} \tag{15}$$

válido para  $\Theta \in (0, 1]$ , en el que  $a \in R^+$  es el grado de saturación,  $n \in R^+$  es un parámetro relacionado con el tamaño de poro y  $K_s$  y la conductividad hidráulica saturado (m/s).

Se recomienda utilizar los experimentos de (Mualem, 1978) y (Hayek, 2016) para la validación. En (Mualem, 1978) utilizó datos experimentales de 50 suelos, para los cuales encontró que  $n$  varía entre 2, 5 y 24, tanto para suelos granulares (arena o grava) como para suelos de textura fina (limo y arcilla).

Hayek, (2016) desarrolló una solución exacta a la ecuación unidimensional de Richards (8), la cual es válida para cualquier  $n > 1$  y es una herramienta eficiente para la predicción de la difusividad del suelo y la conductividad hidráulica.

### 2.3 Condiciones de frontera para el riego

Dado que se utiliza un modelo de suelo semi-infinito, es necesario establecer las condiciones de contorno en su superficie de interfaz con la atmósfera (Assouline, (2013). Para el caso de flujo en suelos no saturados, considere ((Richards, 1931)., eq. (12)):

$$q = -K(\theta)\nabla[\Psi(\theta) - \Phi(z)], \Phi(z) = gz \tag{16}$$

en la que la fuerza de gravedad  $F = -\nabla\varphi = -g$  está representada por el gradiente negativo del potencial  $\varphi, z \in R^+$  es la profundidad de interés y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

El control de la humedad del suelo se realiza mediante la aspersión de agua sobre su superficie, dada por el caudal  $u \in R^+$ . También hay perturbaciones ambientales, como la lluvia y la evaporación del agua, que dan como resultado el flujo  $d_0 \in R$ . La resultante de estos flujos de humedad es la densidad del flujo de agua en la superficie del suelo (m/s):

$$q(0, t) = u(t) + d_0(t) \tag{17}$$

En este caso, de (14) (Hayek, 2016), obtenemos la condición de contorno tipo Neumann en la superficie del suelo, que se puede escribir como (Villar & Cunha, 2022):

$$K(\theta(0, t)) - D(\theta(0, t))\frac{\partial\theta(z, t)}{\partial z} |_{z=0} = q(0, t) \tag{18}$$

## 3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

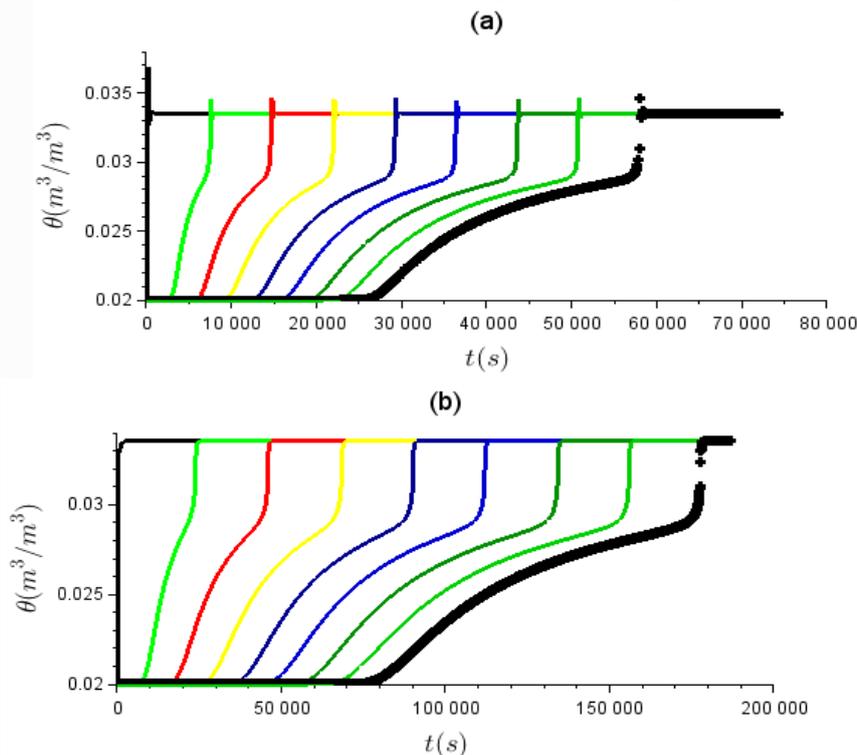
### 3.1. Simulación de Infiltración de Agua en el Suelo con parámetro de ingravidez

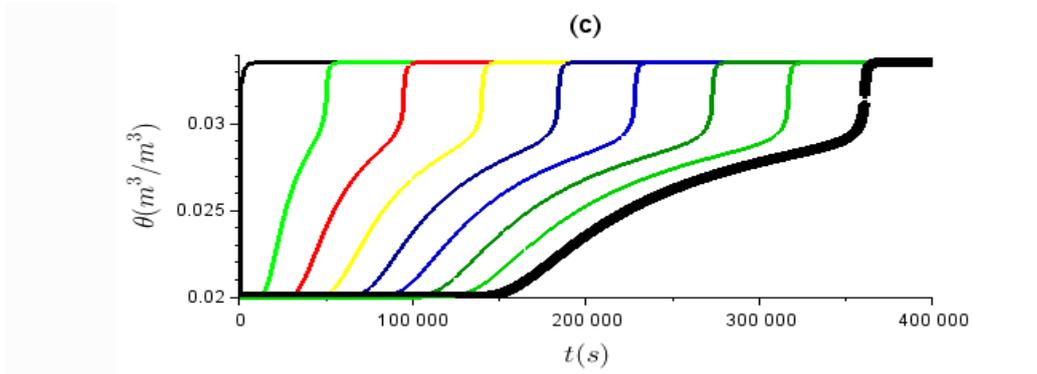
La figura 2 presenta simulaciones de la ecuación de Richards para ilustrar su comportamiento dinámico no lineal. Los parámetros de un suelo real se utilizaron en la Tabla 1.

La profundidad total del suelo es de 1 m. A esta profundidad, se impuso la condición de contorno de Dirichlet para el contenido.

**Figura 2.**

*Simulaciones de la evolución del contenido de agua en varias profundidades de suelo.*





Nota. Suelos de arena arcilloso para el siguiente flujo de agua en la superficie:  $q(0, t) \equiv 3 \times 10^{-8} \text{ m/s}$  resultados para (a)  $g \cong 9.8$ , (b)  $g_M \cong 3.2$ . e (c)  $g_L \cong 1.6$ . Cada línea de color representa el contenido de agua en una profundidad, separados 0,1 m.

**Tabla 2.**

Propiedades físicas del suelo tipo arena arcilloso utilizado en las simulaciones.

Gravedad (m/s)	$\theta_s (\frac{m^3}{m^3})$	$\theta_r (\frac{m}{s})$	$\alpha (\frac{1}{m})$	$n$
$g \cong 9.8$	0.401	0.031	11.5	1.47
$g_M \cong 3.2$	0.401	0.031	11.5	1.47
$g_L \cong 1.6$	0.401	0.031	11.5	1.47

**Fuente:** Datos obtenidas de (Hillel, 1998) e (Villar & Cunha, 2022).

Se realizaron tres simulaciones con condiciones de contorno tipo Neumann (16) y un tipo de flujo de agua en la superficie del suelo:  $q(0, t) \equiv 3 \times 10^{-8} \text{ m/s}$  en la Figura 2.a, b, c. Se observa que el agua tarda aproximadamente  $6 \times 10^{-4} \text{ s}$  en la Figura 2.a,  $18 \times 10^{-4} \text{ s}$  en la Figura 2.b y  $38 \times 10^{-4} \text{ s}$  en la Figura 2.c para propagarse entre cada capa. Esto indica que la propagación depende del flujo de agua y efectos de la ingravidez debido a las no linealidades de los coeficientes (15) de la ecuación de Richards. También se observa que el retraso de esta infiltración se reduce y el valor de la humedad en estado estacionario se incrementa cuando el caudal de agua es mayor y la falta de gravedad, lo que parece consistente con el comportamiento físico esperado.

En las simulaciones de este artículo, se utilizó el tamaño de poro distribuidos en el suelo  $n = 2$  para arena. Consecuentemente  $D(\Theta) = 2, 1 \times 10^{-5} \Theta^{0.47} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $K(\Theta) = 1, 4 \times 10^{-4} \Theta^{1.47} \text{ m/s}$ , que se obtienen de (15) con los parámetros de la Tabla 1.

### 3.2. Controle por modo deslizante de humedad media y Análisis de ingravidez

En esta sección, el objetivo es controlar la humedad promedio del suelo  $\theta$  en el rango de profundidad  $z \in [0, L_1]$ , cerca de la superficie como en la Figura 1. cerrado, el sensor debe medir la humedad promedio (Villar & Cunha, 2022).

$$\bar{\theta}(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \theta(z, t) dz \tag{17}$$

Para regularlo se define la superficie de deslizamiento  $\sigma(t) = 0$  establecida por el signo de error

$$\sigma(t) = \bar{\theta}_{ref}(t) - \bar{\theta}(t) \tag{18}$$

donde  $\theta_{ref}$  es la humedad media deseada.

El controlador debe actuar sobre el sistema descrito por la EDP no lineal (10), con la condición de contorno (16) a través de la señal de control en (15). Como (Molina, 2019), se eligió la ley de control de estructura variable (Villar & Cunha, 2022).

$$u(t) = \begin{cases} u^+ & se \quad \sigma > 0 \\ u^- & se \quad \sigma < 0 \end{cases} \quad (19)$$

en el cual

$$u^+ = \bar{d}(t) + \delta \quad (20)$$

y una señal de modulación de control, posiblemente extrema, como el rociador de agua encendido,

$$u^- = \underline{d}(t) - \delta \quad (21)$$

es otra señal de modulación de control, posiblemente extrema, como el rociador de agua apagado, y  $\delta > 0$  es una constante arbitraria. El límite superior  $\bar{d}(t) \in R$  y el límite inferior  $\underline{d}(t) \in R$  son señales continuas por partes conocidas que satisfacen la desigualdad (Molina y Cunha, 2019, eq. (16)):

$$\underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (22)$$

donde  $d(t) \in R$  es la señal de perturbación a ser rechazada por el controlador, ver (31).

El teorema 1 establece la existencia del modo deslizante en la superficie  $\sigma = 0$  y garantiza que la humedad media  $\theta$  convergerá en un tiempo finito a la referencia  $\theta_{ref}$ , como se desee. Esto se extiende ((Molina, 2019), Teorema 1), válido para una EDP lineal, para controlar la ecuación de Richards no lineal y también corrige condiciones de contorno erróneas, que no consideraban la conductividad  $K(\theta(0, t))$  en (16) y  $K(\theta(L1, t))$  en (28). Teorema 1. Considere la PDE no lineal (10), la condición de frontera (15)–(16), la ley de control (19)–(21), la humedad promedio (17) y el signo  $\sigma(t)$  dado por ecuación (18). Si la perturbación verifica la desigualdad (22), entonces se alcanzará la superficie de deslizamiento  $\sigma = 0$  en un tiempo finito.

**Prueba.** Sustituyendo la humedad media (17) en la señal (18), podemos obtener la derivada temporal de  $\sigma(t)$  (Villar & Cunha, 2022).

$$\dot{\sigma} = \dot{\theta}_{ref}(t) - \int_0^{L1} \theta_t(z, t) dz \quad (23)$$

Usando  $\theta_t(z, t)$  de EDP (10) en la ecuación (23), esto se puede reescribir como

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\theta}_{ref}(t) - \int_0^{L1} [D(\theta(z, t))\theta_{zz}(z, t) + (D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) - K'(\theta(z, t))\theta_z(z, t))] dz \quad (24)$$

Aplicando integración por partes a PDEs, el resultado

$$\dot{\sigma} = \dot{\theta}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} \left[ D(\theta(z, t))\theta_{zz}(z, t) \Big|_0^{L_1} - \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz \right] - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} D_z(\theta(z, t))\theta_z(z, t) dz - \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \frac{K(\theta(z, t))}{a\theta} \theta_z(z, t) dz \quad (25)$$

en que se utilizó la propiedad (Hillel, 1998, eq. (8.24d))

$$K'(\theta(z, t))\theta_z(z, t) = K_z(\theta(z, t)) = \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (26)$$

Resolviendo las integrales en la ecuación (26), se puede obtener

$$\dot{\sigma} = \dot{\theta}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} [D(\theta(L_1, t))\theta_z(L_1, t) - K'(\theta(L_1, t))] + \frac{1}{L_1} [D(\theta(0, t))\theta_z(0, t) - K'(\theta(0, t))] \quad (27)$$

que, utilizando las condiciones de contorno de tipo Neumann (16) y

$$K(\theta(L_1, t)) - D(\theta(L_1, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=L_1} = q(L_1, t) \quad (28)$$

se puede reescribir con

$$\dot{\sigma} = \dot{\theta}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} [q(L_1, t) - q(0, t)] \quad (29)$$

Entonces, la condición de contorno (16) se expresa como una función de la señal de control en (15) y la densidad del flujo de agua en la profundidad  $L_1$  se denomina perturbación dog  $d_1(t) := -q(L_1, t)$  para obtener

$$\dot{\sigma} = \dot{\theta}_{ref}(t) - \frac{1}{L_1} [d_1(t) + u(t) + d_0(t)] = \frac{1}{L_1} [d(t) - u(t)] \quad (30)$$

en el que se supone que la señal de perturbación

$$d(t) := L_1 \dot{\theta}_{ref}(t) - d_0(t) - d_1(t) \quad (31)$$

satisface la desigualdad (22). Para asegurar que el estado del sistema permanezca en modo deslizante, se deben cumplir las siguientes condiciones de existencia ([16], eq. (1.9))

$$\lim_{\sigma(t) \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}(t) < 0, \quad \lim_{\sigma(t) \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}(t) > 0 \quad (32)$$

Aplicando las ecuaciones (20) y (21) en (30), concluimos que si  $\sigma > 0$ , entonces

$$u = u^+ = \bar{d}(t) + \delta \rightarrow \dot{\sigma} \leq \frac{\delta}{L_1} < 0 \quad (33)$$

si  $\sigma < 0$ , entonces

$$u = u^- = \underline{d}(t) - \delta \rightarrow \dot{\sigma} \geq \frac{\delta}{L_1} > 0 \quad (34)$$

lo que garantiza que se verifican las condiciones de existencia del modo deslizante (32).

$$t_s \leq \frac{\delta}{L_1} |\sigma(0)| < +\infty$$

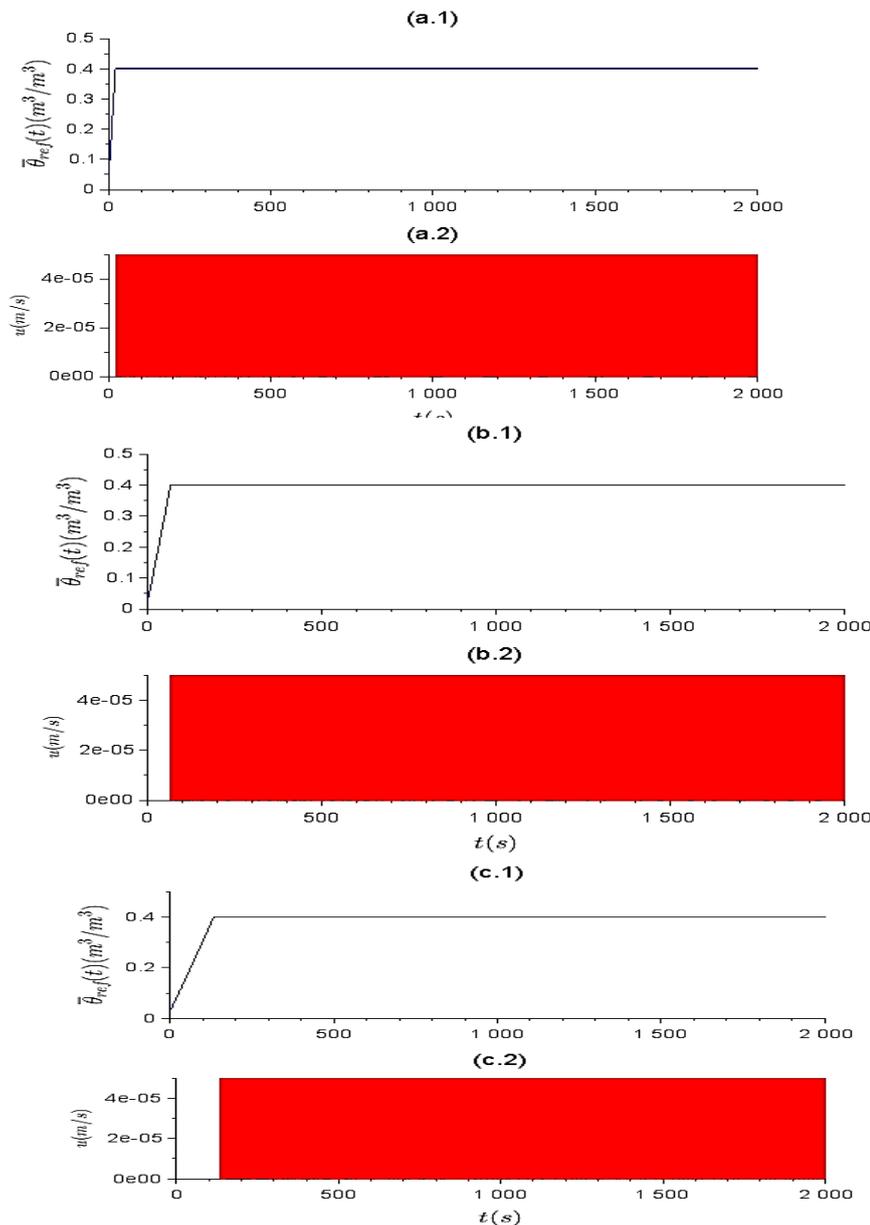
También se puede concluir que la superficie de deslizamiento  $\sigma = 0$  se alcanzará en algún tiempo finito (Villar & Cunha, 2022).

### 3.1 Simulación de Regulación de Humedad Media en Tierra, Marte y Luna

Los resultados de la simulación presentados en la Figura 3 ilustran la regulación de la humedad promedio en una capa de suelo con un espesor  $L_1 = 0,1$  m. El regulador de humedad enciende ( $u^+ = 4 \times 10^{-5}$  m/s) o  $u^- = 0$  m/s apaga la densidad del flujo de agua, según la ley de control (19).

**Figura 3.**

*Control de modo deslizante para ajustar (a.1), (b.1) y (c.1) el contenido promedio de agua del suelo en Tierra, Marte y Luna (a.2), (b.2) y (c.2) la señal de control.*



La Figura 3, muestra la excelente respuesta transitoria del control de modo deslizante para la dinámica no lineal del riego del suelo.

La referencia de humedad media  $\theta_{ref}(t) = 0,2 \left(\frac{m^3}{m^3}\right)$  se alcanza en un tiempo finito  $t_s \approx 700$  s, como prevé el Teorema 1, y sin superar el valor final. No se observa ningún efecto de la perturbación  $d(t) = 2 \times 10^{-7}$  m/s en (15), causada por la lluvia, sobre la humedad promedio en la Figura 3(a). La Figura 3(a) también indica la ausencia de vibraciones a humedad media (chattering), aunque la señal de control cambia a alta frecuencia durante la ocurrencia del modo deslizante, como se puede ver en la Figura 3(b).

### 3.2. Control de humedad en una profundidad especificada en Tierra, Marte y Luna

Los sustratos y suelos demasiado húmedos serían perjudiciales para el crecimiento de las raíces de las plantas. Las raíces necesitan respirar y demandan oxígeno, el exceso de agua las ahogaría literalmente (Testa, 2019). Por lo tanto, es importante regular el contenido de agua en el suelo a una profundidad específica  $L_2 \in \mathbb{R}^+$ . Para ello, defina la señal de error:

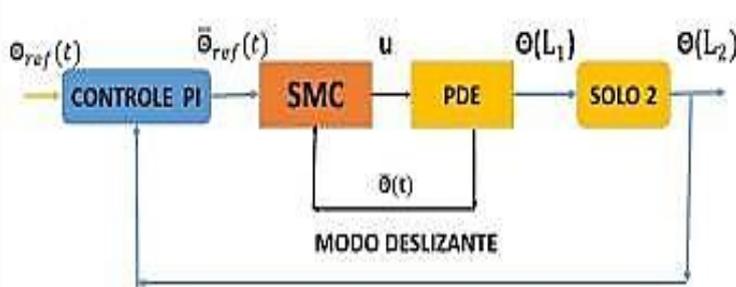
$$e(t) = \theta_{ref}(t) - \theta(L_2, t) \tag{35}$$

en donde  $\theta_{ref}(t)$  es la humedad deseada y  $\theta(L_2, t)$  es la humedad medida por un sensor ubicado como en la Figura 1. Se utiliza el esquema de control en cascada descrito en la Figura 4, en el cual el controlador de la humedad promedio  $\theta(L_2)$  genera la señal de referencia  $\bar{\theta}_{ref}$  para el controlador SMC de humedad media. El controlador de bucle interno es capaz de rechazar las perturbaciones ambientales en la superficie del suelo durante el modo deslizante.

Por otro lado, el controlador de bucle externo debe ser resistente a grandes variaciones paramétricas de los coeficientes de conductividad y difusividad hidráulica del suelo, que son altamente no lineales y dependen de la humedad.

**Figura 4.**

*Diagrama del sistema de control de humedad del suelo en la profundidad  $L_2$ .*



Este fenómeno provoca una gran variación en el retraso de la propagación de la humedad, como se ilustra en la Sección 2.3. Para ello se eligió un controlador con acciones proporcionales e integrales (PI) (Astrom, 1995), ya que puede ajustarse para ser robusto a retardos inciertos y elimina errores residuales, siempre que su referencia se mantiene constante. La ley PI con salida de control  $\theta_{ref}(t)$  viene dada por:

$$\bar{\theta}_{ref}(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right] \tag{36}$$

donde  $K_p > 0$  es la ganancia proporcional y  $T_i > 0$  es el tiempo integral. El controlador PI se ajustó siguiendo a Basilio y Matos (2002) Coron, J.M. (2007). Quienes utilizan parámetros que se pueden medir en respuesta al paso del sistema a controlar, en este caso el lazo de control de humedad promedio con señal de entrada  $\theta_{ref}(t)$  y señal de salida  $\theta(L_2, t)$ . Estos parámetros son  $A_0 > 0$  que es una integral obtenida de la señal de salida y  $A = \theta(L_2, +\infty) > 0$  que es el valor final de la señal de salida. Entonces, los parámetros del controlador PI vienen dados por  $K_p = A/(4\theta_{ref})$  y  $T_i = A_0/(2\theta_{ref})$ .

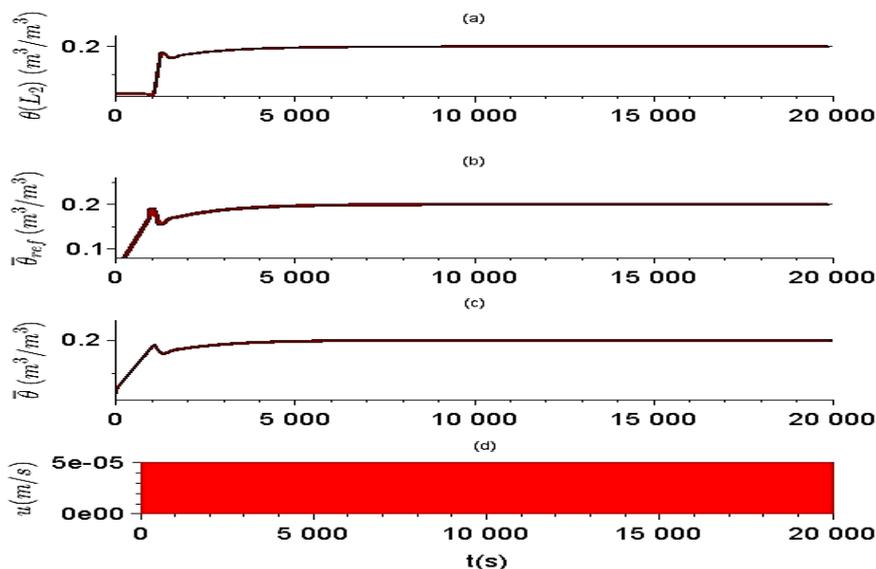
### 3.3. Simulación de Control de Humedad en Cascada y efectos de ingravidez.

Los resultados de la simulación de control de humedad se muestran en la Figura 5 para  $L_2 = 0,50$  m. En el controlador PI se utilizaron los siguientes parámetros:  $K_p = 0,20$  y  $T_i =$  , los cuales se obtuvieron del área  $A_0 = 4 \times 10^{-10}$  s,  $A = 0,16$  de la respuesta al escalón con amplitud  $\theta_{ref}(t)$  . Estos parámetros fueron ajustados para obtener una respuesta transitoria que no sea demasiado lenta y libre de exceder la humedad por la referencia deseada  $\theta_{ref}(t) = 0,20 \frac{m^3}{m^3}$  , como se puede ver en la Figura 5(a).

En la señal de control que se muestra en la Figura 5(d) se puede ver que la conmutación de alta frecuencia se produce desde el principio, lo que indica la aparición del modo deslizante. Tenga en cuenta que la humedad promedio en la Figura 5(c) sigue su referencia, la Figura 5(b), que es generada por el controlador PI. En la Figura 5(a) se puede ver el retraso en la infiltración del agua en el suelo, lo que retrasa la convergencia de la humedad al valor de referencia  $\theta_{ref}(t) = 0,2 \frac{m^3}{m^3}$ . La estabilidad del sistema de control también se verificó en otras simulaciones realizadas para diferentes valores de la humedad de referencia, aunque los transitorios son diferentes por la no linealidad de la dinámica de infiltración.

**Figura 5.**

Control de (a) humedad a la profundidad especificada  $L_2, = 0,50$  m, (b) señal de salida del controlador PI, (c) humedad promedio cerca de la superficie y (d) señal de control con gravedad tierra.

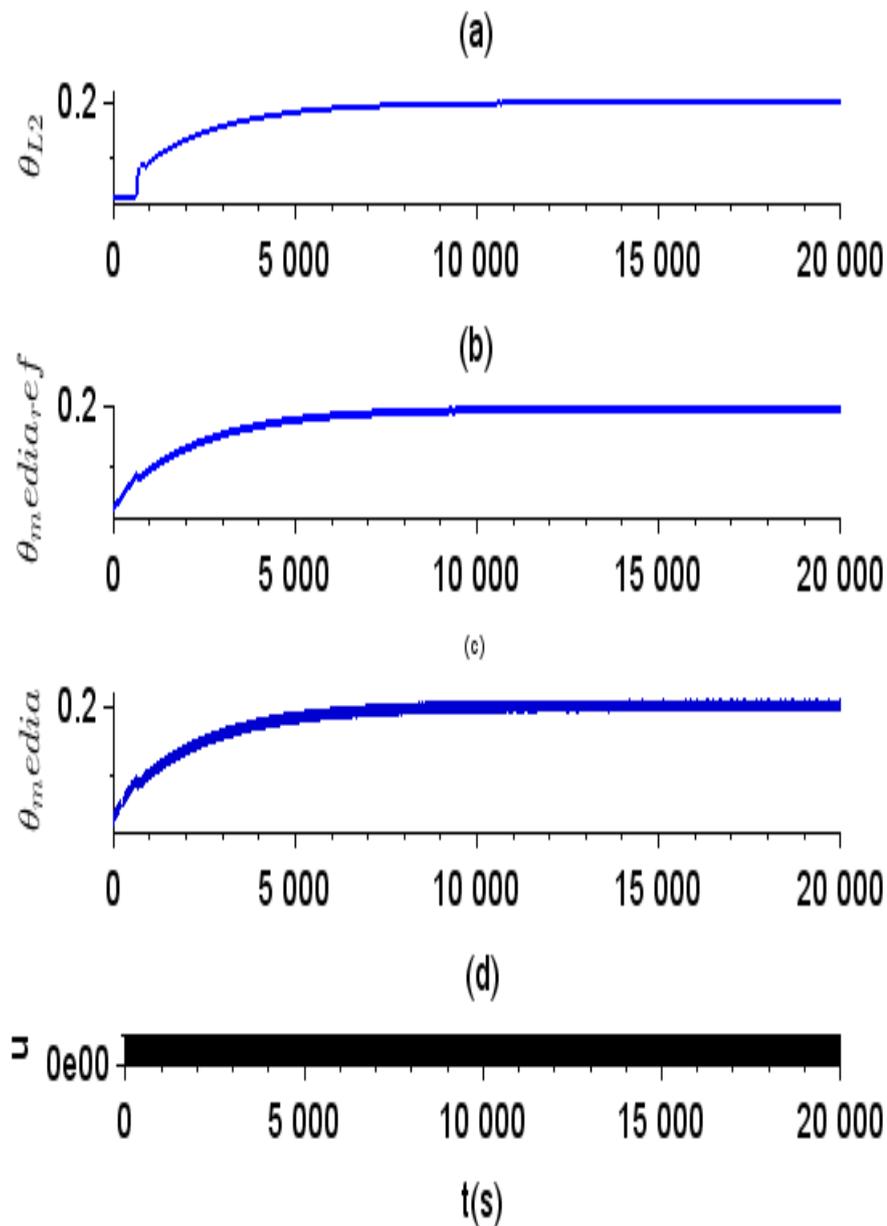


En caso de suelos marcianos están compuestos por basalto **tolitico** (Hu, 2022) es decir suelos tipo arcilla y yeso, pero que debido al reducido valor gravitacional el tiempo de respuesta es mayor, seguidamente para ambientes de la Luna con suelo tipo **regolito** (Hu, 2022).

Este tipo de suelo Lunar carece de compuestos orgánicos que sustentan la vida, y como se muestra en las simulaciones (figura 7) el tiempo de respuesta es muy lenta, con aparente estabilidad, esto debido a valor reducido de su campo gravitacional. Un ejemplo de ello es similar a un astronauta caminando por la superficie lunar lentamente con aparente estabilidad.

### Figura 6.

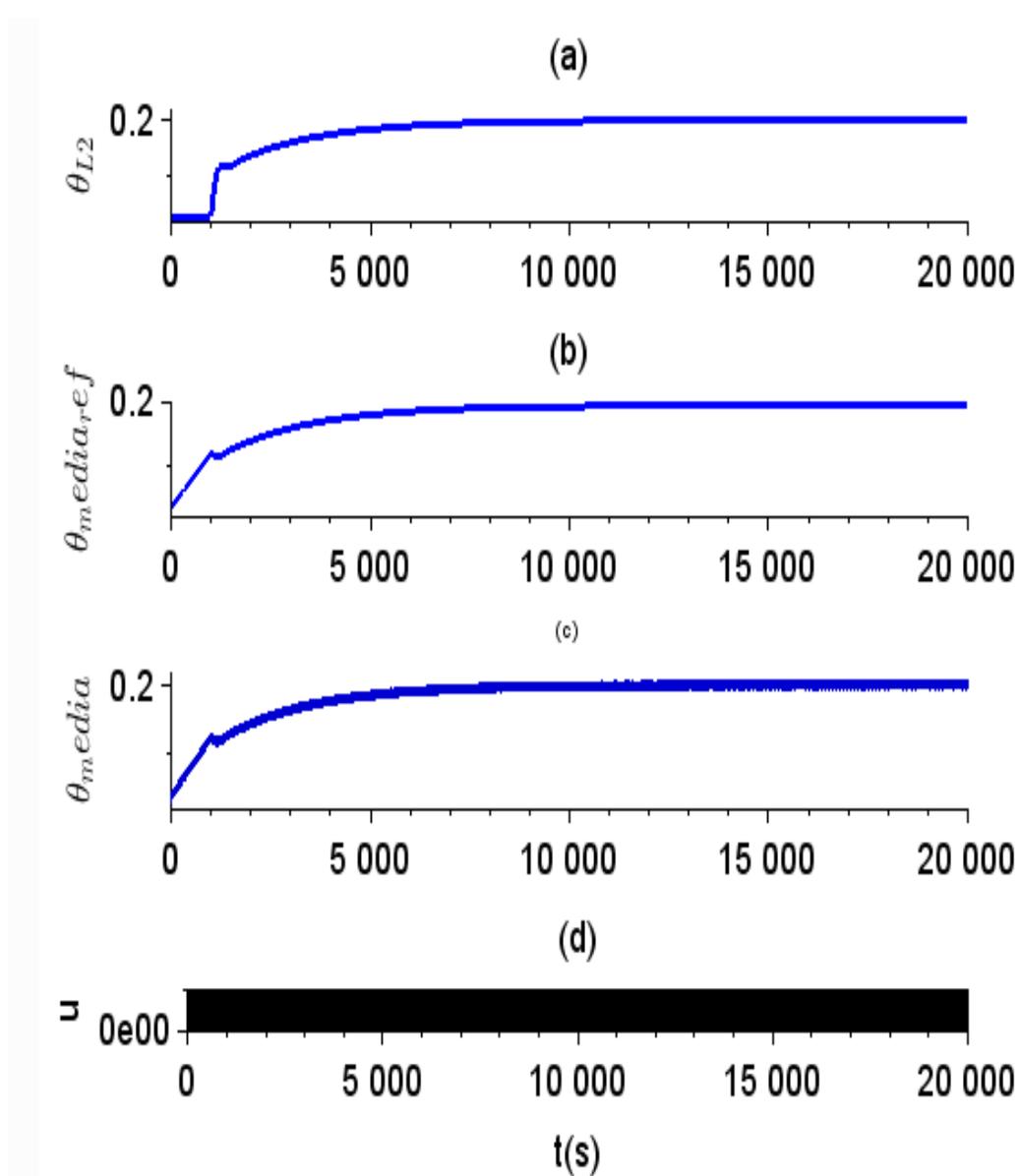
Control (a) humedad a la profundidad especificada  $L_2 = 0,50$  m, (b) señal de salida del controlador PI, (c) humedad promedio cerca de la superficie y (d) señal de control para ambientes con gravedad del planeta Marte.



En las figuras 5, 6 y 7, se observan una ligera variación en el patrón de comportamiento al momento de realizar el control de la humedad de suelo debido a los efectos de la ingravidez, aun no se haya considerado parámetros e suelo de cada ambiente.

### Figura 7.

Control (a) humedad a la profundidad especificada  $L_2 = 0,50$  m, (b) señal de salida del controlador PI, (c) humedad promedio cerca de la superficie y (d) señal de control, con gravedad Lunar.



## 4. CONCLUSIONES

Se propuso la conexión de un controlador PI en cascada con el SMC, con el fin de obtener el buen desempeño del riego automático en el caso de que no se coloque el sensor y el actuador, es decir, el sensor de humedad esté enterrado a profundidad, donde se quiere regular la humedad, lejos de la superficie del suelo sobre la que se rocía el agua.

Los resultados de la simulación indican el buen desempeño de los controladores y el rechazo de las perturbaciones de entrada, como la lluvia o la evaporación del agua, gracias al modo deslizante. Sin embargo, esto requiere actuadores de conmutación rápida, que podrían ser realizados por válvulas de solenoide y bombas de agua con motores eléctricos. La PDE no lineal de Richards es el modelo dinámico adoptado para el movimiento del agua en medios porosos no saturados. Las no linealidades de las funciones de conductividad y difusividad hidráulicas juegan un papel importante en la determinación del rendimiento del control.

Cabe señalar que el uso de parámetros gravitacionales (ingravidez) es otra contribución en relación con (Villar y Cunha, 2021), donde se consideró PDE no lineales sin considerar efectos de la gravedad, así mejorando el comportamiento dinámico. Para que el EDP sea unidimensional, el agua debe rociarse uniformemente sobre el suelo, considerando los efectos de gravedad Lunar y Marte.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Assouline, S. (2013). Infiltration into soils: Conceptual approaches and solutions. *Water Resources Research*, 49(4), 1755–1772.
- Astrom, K.J. and Hagglund, T. (1995). PID controllers: theory, design, and tuning, volume 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC.
- Baluković, J., Slisko, J., & Cruz, A. C. (2018). A person stands on a balance in an elevator: What happens when the elevator starts to fall. *The Physics Teacher*, 56(3), 156-160.
- Basilio, J.C. and Matos, S.R. (2002). Design of PI and PID controllers with transient performance specification. *IEEE Transactions on Education*, 45(4), 364–370.
- Coron, J.M. (2007). Control and nonlinearity. 136. American Mathematical Soc.
- Edwards, C., Colet, E.F., Fridman, L., Colet, E.F., and Fridman, L.M. (2006). Advances in variable structure and sliding mode control, volume 334. Springer.
- Gardner, W. (1922). Israelsen, O. W., Edlefsen, N., and Clyde, H., "The capillary potential function and its relation to irrigation practice". *Phys. Rev*, 20(2), 196.
- Hayek, M. (2016). An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions. *Journal of Hydrology*, 535, 662–670.
- Hillel, D. (1998). Environmental soil physics: Fundamentals, applications, and environmental considerations. Academic Press, London.
- Hu, Zhuojun, et al. "Research progress on lunar and Martian concrete." *Construction and Building Materials* 343 (2022): 128117.
- Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008). Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs. SIAM.

- Medina, F. J. (2019). Los exploradores espaciales deben ser agricultores.
- Molina, N.I.C. and Cunha, J.P.V. (2019). Non-located sliding mode control of partial differential equations for soil irrigation. *Journal of Process Control*, 73, 1–8.
- Monje, O., Stutte, G. W., Goins, G. D., Porterfield, D. M., & Bingham, G. E. (2003). Farming in space: environmental and biophysical concerns. *Advances in Space Research*, 31(1), 151-167.
- Mualem, Y. (1978). Hydraulic conductivity of unsaturated porous media: Generalized macroscopic approach. *Water Resources Research*, 14(2), 325–334.
- Ribeiro, L. (2013). El agua en las civilizaciones inca e preincas mito, ciencia y tecnología. In 8. ° Congresso Ibérico de Gestão e Planeamento da Agua, 530– 539.
- Richards, L.A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318–333.
- Tarquino, P.F.R. (2018). Resolución de la ecuación de Richards unidimensional por el metodo de volúmenes finitos. B.S. thesis, Universidad Central del Ecuador.
- Testa, G.H. (2019). Automatizacao de estufas para cultivo controlado utilizando redes mesh. B.S. thesis, Universidad Tecnológica Federal do Paraná.
- Utkin, V.I. (1978). *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR Publishers, Moscow.
- Van Genuchten, M.T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892–898.
- Villar, J.L.H., Garcia, J.O., and Hiyo, S.Y.M. (2020). Diseño y construcción de un sistema automatizado de control de bombas de agua en un cultivo hidropónico en el entorno arduino, unsch–Ayacucho. *Revista ECIPerú*, 17(2), 67–73.
- Villar, Jose Luis Huayanay, and José Paulo VS Cunha. "Sliding-Mode Controllers for Soil Moisture Modeled by Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations." 2022 16th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). IEEE, 2022.
- Wadoo, S.A. (2012). Sliding mode control of crowd dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3), 1008–1015.