



## Aproximación numérica de la derivada e integral de orden fraccionario según Caputo y Riemann Liouville.

numerical approximation of the derivative and integral of fractionary order according to caputo and Riemann-liouville

 [Paiva-Yanayaco, Daúl Andrés<sup>1</sup>](#)

<sup>1</sup>Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Perú.

**Recibido:** 04 May. 2024 | **Aceptado:** 5 Jun. 2024 | **Publicado:** 13 Ago. 2024

**Autor de correspondencia\*:** [daul.paiva@unsch.edu.pe](mailto:daul.paiva@unsch.edu.pe)

**Cómo citar este artículo:** Paiva-Yanayaco, D.A.(2024). Aproximación numérica de la derivada e integral de orden fraccionario según Caputo y Riemann Liouville. Revista Científica Aypate

### RESUMEN

En este trabajo de investigación se presenta una alternativa numérica que permite resolver derivadas e integrales fraccionarias, específicamente integrales fraccionarias, pues éstas aparecen en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, las cuales modelan muy bien ciertos fenómenos físicos. En este trabajo se ha utilizado la Regla del Trapecio Modificada. Las aproximaciones han sido implementadas, como se ve en los cálculos y gráficas, con el software Matlab y el software Matemática y no difieren en gran medida con los de los exactos.

**Palabras Clave:** Derivadas e integrales fraccionarias, ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, regla del trapecio modificada.

### ABSTRACT

This research is to present a numerical alternative that solves fractional derivatives and integrals, fractional integral specifically, as they appear in fractional order differential equations, which model physical phenomena very well. This paper has used the property Trapezoid Rule. Approaches have been implemented, as shown in the calculations and graphs, with the Matlab software and the software Mathematica not differ greatly with the accurate.

**Keywords:** Fractional Derivatives, Fractional integrals, differential equations of fractional order, modified trapezoid rule.



## 1.INTRODUCCIÓN

El Cálculo Fraccionario se ocupa del estudio de los llamados operadores de integración y derivación fraccionarios sobre dominios de funciones reales o complejas (Odibat, 2006). Así, se han desarrollado progresivamente muchas definiciones de derivada fraccionaria,  $D^\alpha$ , que pretenden generalizar el concepto de derivada ordinaria,  $D$ , de manera que para  $\alpha = 1$  vuelva a recuperarse el operador ordinario. Se ha ampliado también este concepto a órdenes de integración y derivación no sólo fraccionarias sino también reales y complejas, lo cual hace que sea más apropiado hablar de “Integración y Diferenciación de Orden Arbitrario”.

La primera información sobre la existencia de una derivada de orden  $1/2$  fue expuesta en 1695, en una carta de L'Hopital a Leibniz, a la que Leibniz augura: “Esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias”. Posteriormente, cabe señalar, entre otros, a Laplace, Fourier, Abel, Liouville o Riemann (durante el siglo XIX), y Weyl, Laurent, Hardy, Littlewood, Erdelyi o Snedon, entre otros (en los dos primeros tercios del siglo XX). Sin embargo, ninguno de ellos estudió ampliamente el tema, pues la cantidad de cuestiones abiertas en el ámbito de los problemas de tipo ordinario hacía imposible considerar otros planteamientos alternativos e innovadores. Fue Euler quien, en 1738, introduce la primera generalización de la derivada ordinaria, verificando que la derivación fraccionaria tenía sentido para la función potencia  $x^a$ . Por otro lado, en 1819, Lacroix parte de la derivada  $m$ -ésima de la función  $y = x^a$ , con  $m$  y  $n$  enteros positivos (Odibal, 2006).

$$\frac{d^m}{dx^m} y = \frac{n!}{(n-m)!} x^{(n-m)} \quad (1)$$

para determinar la derivada de orden  $1/2$  de la función  $y = x^a$ , gracias a la generalización de la factorial mediante la función Gamma:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} y = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{(a-1/2)} \quad (2)$$

Posteriormente, Fourier en 1822 definió, para una función suficientemente regular, la siguiente derivada de orden  $p$  arbitrario (Diethelm, Ford y Freed, 2004):

$$\frac{d^p}{dx^p} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{2}\right) dt \quad (3)$$

Hasta este momento, no se había presentado ninguna aplicación de estos operadores fraccionarios. Es entonces cuando Abel, en 1823, utiliza la derivada de orden  $\alpha = 1/2$  para resolver la ecuación integral del problema de la braquistócrona (Diethelm, et al, 2004):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} g(t) dt = f(x) \quad (4)$$

Estos estudios fueron de interés para Liouville quien, partiendo de la derivada ordinaria de una exponencial, establece una extensión natural a una derivada de orden  $p$  arbitrario

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax} \quad (5)$$

para posteriormente, tomando una función  $f$  desarrollable en serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \quad (6)$$

establecer su derivada fraccionaria (primera definición de Liouville) (Podlubny, 1999):

$$D^p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x} \quad (7)$$

Luego intenta otros operadores de derivación de orden fraccionario, para luego centrarse en la integral fraccionaria, de donde dedujo en el año 1832 la siguiente fórmula:

$$(D^{-p} f)(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{(p-1)} f(x+t) dt, \operatorname{Re}(p) > 0 \quad (8)$$

que salvo por el factor  $(-1)^p$ , es conocida hoy como la integral fraccionaria de Liouville (Diethelm, et al, 2004).

Posteriores estudios basados en la fórmula de Cauchy para la integral repetida llevaron a la obtención de la hoy conocida integral fraccionaria de Riemann-Liouville (1870-1884). También por esta época (1867-1868) se obtuvo el operador fraccionario conocido como derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. y posteriormente, se desarrollaron nuevas fórmulas ínte-grodiferenciales fraccionarias: integral fraccionaria de Weyl (1917), integral fraccionaria de Riesz (1936), derivada fraccionaria de Caputo (1967) entre otros.

Actualmente, se ha experimentado un gran auge de los conceptos del Cálculo Fraccionario y constituyen un lugar de encuentro de múltiples disciplinas, como la teoría de probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones íntegro diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.

Cabe destacar el gran interés que hay sobre las ecuaciones diferenciales fraccionarias, es decir, ecuaciones que involucran derivadas de orden real o complejo:

$$F(t, X(t), (D^{\alpha_1} X)(t), \dots, (D^{\alpha_n} X)(t)) = 0 \quad (9)$$

donde  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  y  $D^{\alpha_j}$  es una derivada fraccionaria de orden  $\alpha_j$  (igualmente pueden definirse EDPs (Podlubny, 1999)).

El desarrollo de este trabajo es motivado por la teoría clásica y por muchas aplicaciones recientes de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

## 2.MÉTODOS Y MATERIALES

Definiciones básicas:

### 2.1. Regla del Trapecio

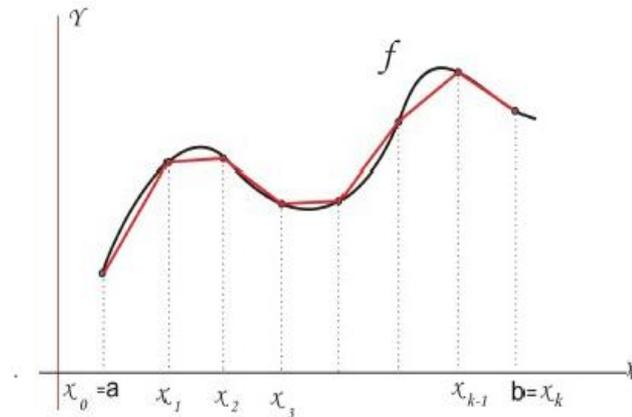
Supóngase que el intervalo  $[a,b]$  es subdividido en  $k$  subintervalos  $[x_j, x_{j+1}]$  de igual longitud  $h = (b - a)/k$ . Usando los nodos  $x_j = a + jh$ , para  $j = 0, 1, \dots, k$ , la **Regla del Trapecio Compuesta para la función  $f(x)$  sobre  $[a, b]$  es definida como:**

$$T(f, h) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^k ((f(x_{j-1}) + f(x_j))) \quad (10)$$

$$= \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{k-1} f(x_j) \quad (11)$$

**Figura 1.**

La función  $f(x)$  y los nodos  $x_j = a + jh$ .



La Figura (1) muestra a la función  $f(x)$  y la poligonal con extremos los nodos  $x_j = a + jh$ .

**2.2. Término del Error de la Regla del Trapecio**

Si  $f(x) \in C^2[a, b]$ , entonces existe un valor  $c \in (a, b)$  tal que el término del error  $E(f, h)$  tiene la forma:

$$E(f, h) = -\frac{(b-a)}{12} f^{(2)}(c)h^2 = O(h^2) \quad (12)$$

donde

$$E(f, h) = \int_a^b f(x)dx - T(f, h) \quad (13)$$

**2.3. Regla del Trapecio Modificado**

Supóngase que el intervalo  $[0, a]$  es subdividido en  $k$  subintervalos  $[x_j, x_{j+1}]$  de igual longitud  $h = a/k$ . Usando los nodos  $x_j = jh$  para  $j = 0, 1, \dots, k$ , la **Regla del Trapecio Modificado** (Odibat, 2006)

$$T(f, h, \alpha) = ((k-1)^{\alpha+1} - (k-\alpha-1)k^\alpha) \frac{h^\alpha f(0)}{\tau(\alpha+2)} + \frac{h^\alpha f(a)}{\tau(\alpha+2)} + \sum_{j=1}^{k-1} ((k-j+1)^{\alpha+1} - 2(k-j)^{\alpha+1} + (k-j-1)^{\alpha+1}) \frac{h^\alpha f(x_j)}{\tau(\alpha+2)} \quad (14)$$

es una aproximación para la integral fraccionaria

$$(J^\alpha f(x))(a) = T(f, h, \alpha) - E_T(f, h, \alpha), \text{ con } a > \alpha > 0. \quad (15)$$

Para las aproximaciones numéricas se ha trabajado con funciones trigonométricas como seno, coseno, los intervalos de trabajo son, en algunos casos  $[0, 2\pi]$ . Se define, para la función respectiva, su integral exacta, mediante la definición de la integral de Riemann-Liouville. Luego empleamos un intervalo genérico  $[0, x]$ , indicamos el número de intervalos  $k$ , hallamos el tamaño de paso  $h$ , se generan los nodos y se define la integral en forma aproximada empleando el método de la Regla del Trapecio modificada. Se han graficado ambos casos, dependiendo el orden de integración fraccionaria.

### 3.RESULTADOS Y DISCUSIONES

Las aproximaciones de las fórmulas de derivación e integración fraccionarias, de acuerdo a las definiciones dadas por Caputo y Riemann--Liouville, se han obtenido empleando el software matemático, Matlab. Veamos algunos resultados de esta investigación.

#### 3.1. Aproximación de la derivada e integral Fraccionaria de Riemann-Liouville de la función

$$f(x) = \text{sen } x.$$

De acuerdo a Riemann-Liouville (Podlubny, 1999), la integral fraccionaria de orden  $\alpha > 0$  para la función  $f(x)$  está definido como:

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau, \quad (19)$$

una aproximación para la integral  $J^\alpha f(x)$ , dada por (19) es  $T(f, h, \alpha)$ , dada por la ecuación (14). Entonces la integral fraccionaria, de acuerdo a (19), para  $f(x) = \text{sen } x$  es

$$J^\alpha \text{sen } x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{(\alpha-1)} \text{sen } \tau d\tau, \quad (x > 0) \quad (20)$$

Empleando la Regla Modificada del Trapecio, tomamos el intervalo  $[0, x]$  y empleamos  $k$  intervalos. Con ello el tamaño de paso es  $h = x/k$  y los nodos  $x_j = j \frac{x}{k}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ . Entonces una aproximación para (20) es:

$$T(\text{sen}, \frac{x}{k}, \alpha) = \frac{(x/k)^\alpha}{\tau^{(\alpha+2)}} [((k-1)^{\alpha+1} - (k-\alpha-1)k^\alpha) \text{sen}(0) + \text{sen } x + \sum_{j=1}^{k-1} ((k-j+1)^{\alpha+1} - 2(k-j)^{\alpha+1} + (k-j-1)^{\alpha+1}) \text{sen}(\frac{jx}{k})] \quad (21)$$

**Tabla 1.**

Valores de la integral fraccionaria para  $f(x)$ , exactos:  $J^{1/2} \text{sen } x$  y aproximados:  $T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$  en  $[0, 2\pi]$  y orden  $\alpha = 1/2$

$j$	Nodo: $x_j$	$J^{1/2} \text{sen } x_j$	$T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$	$ E_T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}) $
0	0	0	0	0
1	$\pi/3$	0,7094789085927808	0,7078960329585082	0,001582875634272618
2	$2\pi/3$	1,3223598213057874	1,3100785284079302	0,012281292897857288
3	$3\pi/3 = \pi$	1,0097091882273728	0,986090000215781	0,023619188011591796
4	$4\pi/3$	0,008077522465820225	-0,00019163906243998644	0,00826916152826021
5	$5\pi/3$	-0,7248069714243419	-0,6904449004989403	0,034362070925401667
6	$6\pi/3 = 2\pi$	-0,48566310987349876	-0,4366495373691276	0,04901357250437116

Ahora, tomemos el caso particular de  $k = 6$  intervalos, entonces  $h = \frac{x}{6}$ ,  $j = 0, \dots, 6$ . Para el orden  $\alpha = \frac{1}{2}$ , tenemos:

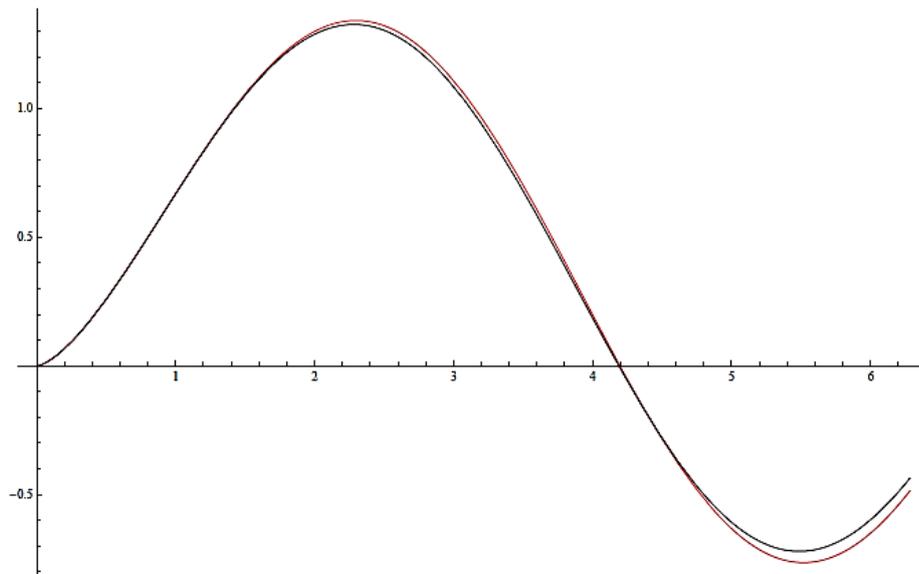
$$T(\text{sen}, \frac{x}{6}, \frac{1}{2}) = \frac{(x/6)^{\frac{1}{2}}}{\tau^{\frac{3}{2}}} [ (5^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} 6^{\frac{1}{2}}) \text{sen}(0) + \text{sen } x + \sum_{j=1}^5 ((7-j)^{\frac{3}{2}} - 2(6-j)^{\frac{3}{2}}) \text{sen}(\frac{jx}{6}) ] \quad (22)$$

En la tabla (1) vemos los resultados exactos dados por la expresión (19) y los aproximados dados por la expresión (22), para el intervalo  $[0, 2\pi]$  en los nodos  $x_j = j\frac{\pi}{3}, j = 0, 1, \dots, 6$ .

En la figura (2) se observan las gráficas de la integral fraccionaria exacta y aproximada, para  $x \in [0, 2\pi]$  y  $\alpha = \frac{1}{2}$ . En la figura (3) están las gráficas para  $\alpha = 0$ .

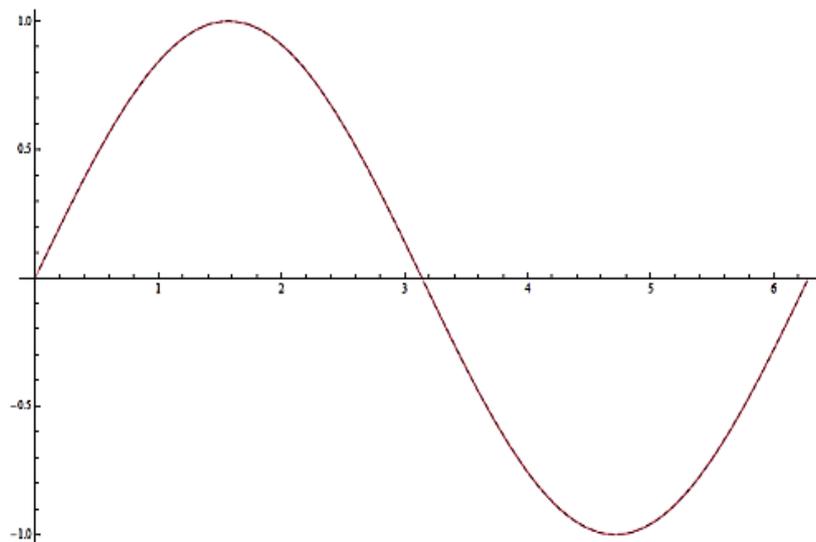
### Figura 2.

Gráfica de  $J^{1/2} \text{sen } x$ , color rojo;  $T(\text{sen}, x/6, 1/2)$ , color negro.



### Figura 3.

Gráfica de  $J^{\alpha=0} \text{sen } x$ , color rojo;  $T(\text{sen}, x/6, \alpha=0)$ , curva segmentada de color negro.



Para el orden  $\alpha = 1$ , se tiene la integral de Riemann de la función  $f(x) = \text{sen } x$ , es decir:

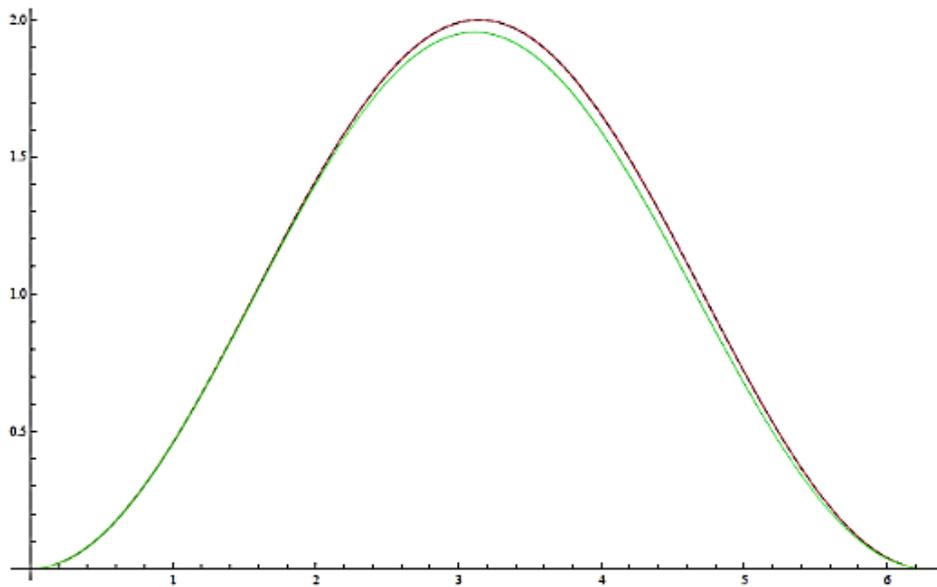
$$J^1 \text{sen } x = \frac{1}{\tau(1)} \int_0^x (x - \tau)^{1-1} \text{sen } \tau d\tau = \int_0^x \text{sen } \tau d\tau = 1 - \cos x = g(x) \quad (23)$$

las gráficas de las funciones  $J^1 \text{sen } x$ ,  $g(x) = 1 - \cos x$  y de  $T\left(\text{sen}, \frac{x}{6}, 1\right)$  está en la figura (4).

En la tabla (2) vemos los resultados exactos dados por la expresión (19) y los aproximados para el intervalo  $[0, 2\pi]$  en los nodos  $x_j = j \frac{\pi}{3}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 6$ , y orden  $\alpha = 0$ . En la tabla (3) tenemos los resultados para el orden  $\alpha = 1$ .

**Figura 4.**

Gráfica de  $J^{\alpha=1} \text{sen } x$ , curva segmentada de color negro;  $g(x)=0 1- \cos x$ , color rojo;  $T(\text{sen}, x/6, \alpha=1)$ , color verde.



**Tabla 2.**

Valores de la integral fraccionaria para  $f(x)$ , exactos:  $J^0 \text{sen } x$  y aproximados:  $T(\text{sen}, \pi/3, 0)$  en  $[0, 2\pi]$  y orden  $\alpha = 0$ .

$j$	Nodo: $x_j$	$J^0 \text{sen } x_j$	$T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, 0)$	$ E_T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, 0) $
0	0	0	0	0
1	$\pi/3$	0,866025	0,866025	$8,58422 \times 10^{-9}$
2	$2\pi/3$	0,866027	0,866027	$4,27517 \times 10^{-8}$
3	$3\pi/3 = \pi$	$1,85194 \times 10^{-6}$	$1,80559 \times 10^{-6}$	$4,63481 \times 10^{-8}$
4	$4\pi/3$	-0,866024	-0,866024	$4,9133 \times 10^{-8}$
5	$5\pi/3$	-0,866026	-0,866026	$1,80362 \times 10^{-7}$
6	$6\pi/3 = 2\pi$	$-1,41815 \times 10^{-6}$	$-1,26051 \times 10^{-6}$	$1,57638 \times 10^{-7}$

En la figura (5) vemos la gráfica de la integral fraccionaria exacta para el intervalo  $x \in [0, 2\pi]$  y orden  $0 < \alpha \leq 1$  y en la figura (5) vemos la gráfica de la integral fraccionaria aproximada para el intervalo  $x \in [0, 2\pi]$  y orden  $0 < \alpha \leq 1$ .

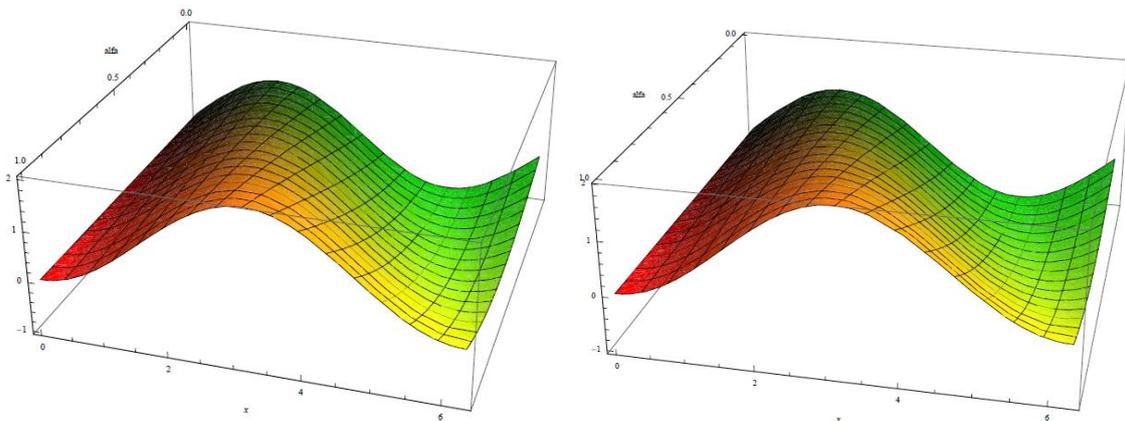
**Tabla 3.**

Valores de la integral fraccionaria para  $f(x)$ , exactos:  $J^1 \text{sen } x$  y aproximados:  $T(\text{sen}, \pi/3, 1)$  en  $[0, 2\pi]$  y orden  $\alpha = 1$ .

$j$	Nodo: $x_j$	$J^1 \text{sen } x_j$	$T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, 1)$	$ E_T(\text{sen}, \frac{\pi}{3}, 1) $
0	0	0	0	0
1	$\pi/3$	0,5	0,49873	0,00126988
2	$2\pi/3$	1,5	1,48474	0,0152619
3	$3\pi/3 = \pi$	2	1,9541	0,0459028
4	$4\pi/3$	1,5	1,43858	0,0614242
5	$5\pi/3$	0,5	0,467859	0,0321412
6	$6\pi/3 = 2\pi$	0	0	0

**Figura 5.**

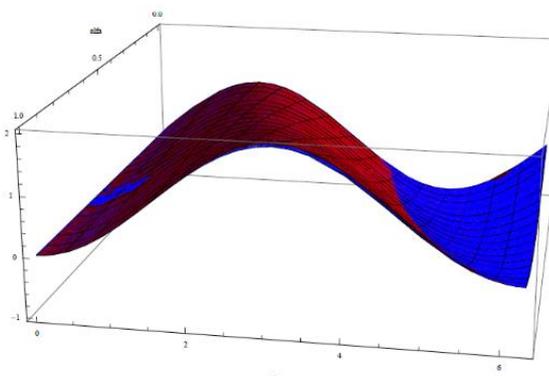
Gráfica de  $J^\alpha \text{sen } x$ , para  $x \in [0, 2\pi]$  y  $0 < \alpha \leq 1$  derecha y gráfica de  $T(\text{sen}, x/6, \alpha)$ , para  $x \in [0, 2\pi]$  y  $0 < \alpha \leq 1$  izquierda.



En la figura (7) comparamos las gráficas de la integral fraccionaria exacta y aproximada para el intervalo  $x \in [0, 2\pi]$  y orden  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Figura 7.**

Gráfica de  $J^\alpha \text{sen } x$ , color rojo, y  $T(\text{sen}, x/6, \alpha)$ , color azul, para  $x \in [0, 2\pi]$  y  $0 < \alpha \leq 1$



De acuerdo a las fórmulas presentadas por Podlubny I., (1999) se obtuvo resultados próximos a los exactos, como se observa en las tablas 1, 2 y 3. Éstos, fueron obtenidos,

tomando en cuenta a la definición dada por Caputo y Riemann-Liouville. Es decir, debe tenerse en cuenta qué definición de derivada e integral fraccionaria se está empleando, pues si se toma definiciones diferentes los resultados de aproximación serán diferentes. Es por ello que de acuerdo a científicos involucrados en el tema es que se ha empleado la definición de Caputo y la de Riemann-Liouville, que son las que más se hacen referencia.

En futuros trabajos de investigación relacionados con las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario se verá que efectivamente las derivadas e integrales fraccionarias aparecen de manera natural y este tipo de ecuaciones son las que en muchos modelos dan una mejor representación.

#### **4.AGRADECIMIENTOS**

Un agradecimiento especial a la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga por el apoyo financiero que se ha otorgado para poder realizar este trabajo de investigación.

#### **REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**

- Diethelm K., Ford N., Freed A. (2004) Detailed error analysis for a fractional Adams method, Numer. Algorithms, 36 31-52.
- Odibat Z., 2006 Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives, Applied Mathematics and Computation, 178, 527-533.
- Podlubny I., (1999) Fractional Differential Equations, Academic Press.
- Trujillo, J. J., Rivero, M., & Bonilla, B. (1999). On a Riemann–Liouville generalized Taylor's formula. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 231(1), 255-265.